Analiza matematyczna I
Lista 4 (zbieżność szeregów)

Zad 1. Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n n},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\sin\frac{1}{n}),\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}).$$

Zad 2. Napisać sumy częściowe podanych szeregów i znaleźć ich granice

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n},\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

Zad 3. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n},\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}.$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},\qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\qquad g)\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\ln\frac{n^3+1}{n^3}},\qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x^n}{n^2}.$$

Zad 4. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżnosc następujących szeregów:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n},\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n},\qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\ln(n!)}.$$

Zad 5. Korzystając z kryterium Cauchy'ego rozstrzygnąć, które z podanych niżej szeregów są zbieżne:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}(n^2+1))^n,\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n,\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}2^n,\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Zad 6. Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n,\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}},\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n^2)}{\ln^2 n}.$$

Zad 7. Zbadać zbieżność następujących szeregów

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^3},\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-1},\qquad e)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{3^n},$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n},\qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n},\qquad h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n},\qquad i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}},\qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n5^n},$$

$$k)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n,\qquad l)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{2^n\cdot 3^{n+1}},\qquad m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2^n},\qquad n)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n},$$

$$o)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1),\qquad p)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},\qquad r)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}.$$